Metody analizy złożonych obwodów RLC w stanie ustalonym

Metoda równań Kirchhoffa

W metodzie tej wykorzystuje się w bezpośredniej formie prawo prądowe i napięciowe Kirchhoffa uzupełnione o równania symboliczne opisujące poszczególne elementy obwodu. W efekcie zastosowania praw Kirchhoffa otrzymuje się układ równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach.

Jeśli założymy, że obwód posiada ***b*** gałęzi i ***n*** węzłów to w równaniach opisujących obwód wykorzystuje się (***n*-1**) równań pochodzących z prawa prądowego Kirchhoffa. Pozostałe (***b*-*n*+1**) równań wynika z prawa napięciowego Kirchhoffa dla (***b*-*n*+1**) dowolnie wybranych oczek niezależnych w obwodzie (oczka uważa się za niezależne, jeśli równania napięciowe opisujące je są od siebie niezależne).

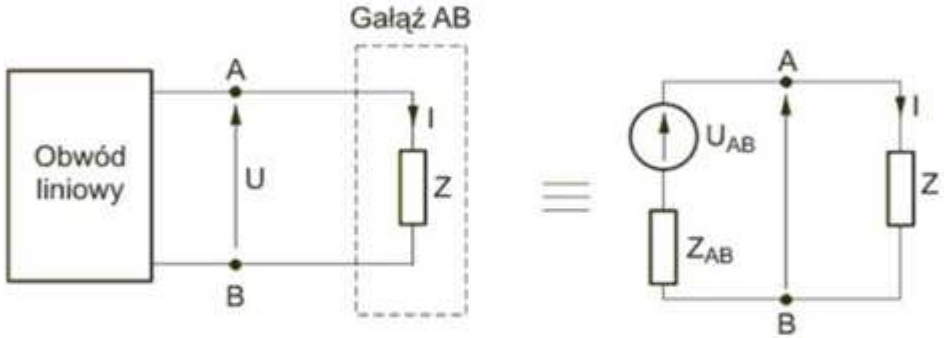
Twierdzenie Thevenina

Dowolny obwód liniowy można zastąpić od strony wybranych zacisków AB uproszczonym obwodem równoważnym, złożonym z szeregowego połączenia jednego idealnego źródła napięcia i impedancji zastępczej obwodu.

Wartość źródła zastępczego oblicza się na podstawie analizy obwodu oryginalnego jako napięcie panujące na zaciskach AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po zwarciu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu.

Analiza obwodu zgodnie z twierdzeniem Thevenina

- Odłącz gałąź AB której prąd jest poszukiwany
- Zastąp pozostałą część obwodu poprzez równoważną mu gałąź Thevenina (rysunek poniżej)



- Oblicz prąd gałęzi AB korzystając z obwodu zastępczego

$$I = \frac{U_{AB}}{Z + Z_{AB}}$$

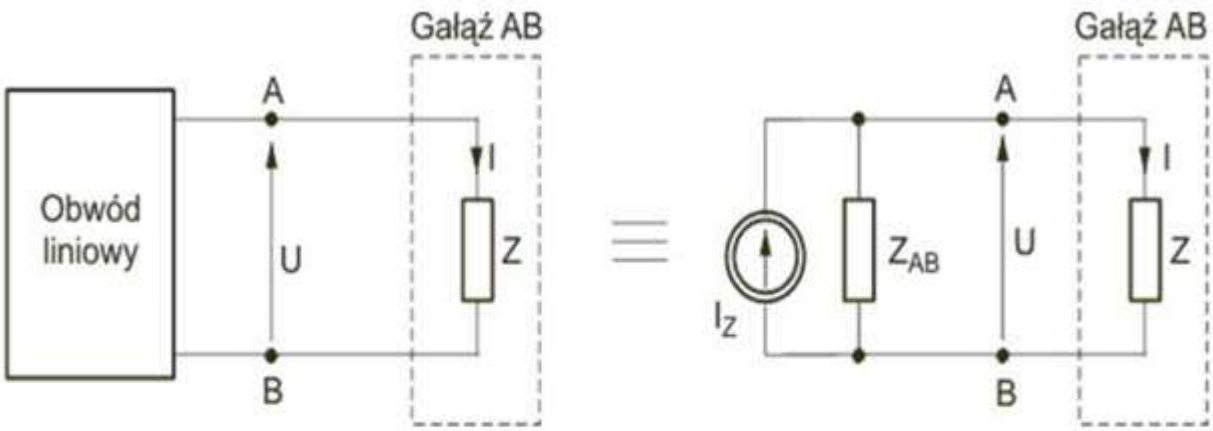
Twierdzenie Nortona

Dowolny aktywny obwód liniowy można od strony wybranych zacisków AB zastąpić obwodem równoważnym, złożonym z równoległego połączenia idealnego źródła prądu i impedancji zastępczej obwodu.

Wartość źródła zastępczego oblicza się w obwodzie oryginalnym jako prąd zwarciowy gałęzi AB. Impedancja zastępcza widziana z zacisków AB dotyczy obwodu po zwarciu wszystkich źródeł napięcia oraz rozwarciu źródeł prądu i jest identyczna z impedancją zastępczą w twierdzeniu Thevenina.

Przy obliczaniu prądu w wybranej gałęzi AB stosując twierdzenie Nortona należy w pierwszej kolejności odłączyć gałąź AB, a następnie skorzystać z twierdzenia Nortona, upraszczając strukturę obwodu.

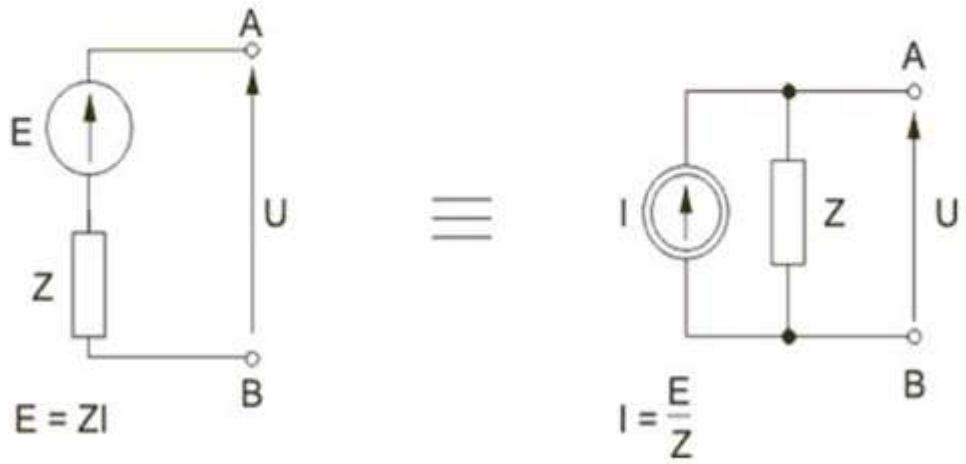
Transformacja obwodu zgodnie z twierdzeniem Nortona



Schemat transformacji obwodu według twierdzenia Nortona

Równoważność twierdzenia Thevenina i Nortona

Schemat zastępczy Thevenina i Nortona stanowią obwody zastępcze równoważne sobie z punktów AB (prąd i napięcie w gałęzi AB, która nie uległa zmianie w wyniku transformacji, muszą być takie same).



Równoważność obwodów zastępczych Thevenina i Nortona

Metoda potencjałów węzłowych

Metoda potencjałów węzłowych, zwana również **metodą węzłową**, jest metodą, pozwalającą w uproszczony sposób wyznaczyć prądy wszystkich gałęzi występujących w obwodzie.

Jako zmienne przyjmuje się w niej potencjały poszczególnych węzłów określane względem arbitralnie wybranego węzła uznanego za **węzeł odniesienia** („masy"), którego potencjał przyjmuje się za równy zeru. Liczba równań w tej metodzie jest równa liczbie węzłów niezależnych a więc znacznie mniejsza niż w metodzie wykorzystującej bezpośrednie równania Kirchhoffa.

Metoda węzłowa wynika z równań prądowych Kirchhoffa napisanych dla wszystkich węzłów niezależnych w obwodzie. Prąd każdej gałęzi obwodu jest wyrażany za pośrednictwem potencjałów węzłowych.

Opis węzłowy

Każdy obwód liniowy RLC może być opisany równaniem macierzowym potencjałów węzłowych o postaci

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr}$$

gdzie

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1N} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{N1} & Y_{N2} & \dots & Y_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{zr} = \begin{bmatrix} I_{zr1} \\ I_{zr2} \\ \dots \\ I_{zrN} \end{bmatrix}$$

Automatyczne tworzenie opisu węzłowego

Elementy położone na głównej diagonalnej macierzy **Y to admitancje własne** węzła *i*-tego. Elementy położone poza główną diagonalną to **admitancje wzajemne** między węzłem *i*-tym oraz *j*-tym.

W przypadku obwodów RLC bez źródeł sterowanych admitancja własna Y_{ii} węzła *i*-tego jest równa sumie admitancji wszystkich gałęzi włączonych w *i*-tym węźle. Admitancja wzajemna Y_{ij} dwu węzłów jest równa admitancji łączącej te węzły wziętej ze znakiem minus.

Elementy wektora wymuszeń prądowych I_{zr} są równe sumie wszystkich prądów źródłowych wpływających do danego węzła, przy czym prąd źródłowy dopływający do węzła bierze się ze znakiem plus a prąd odpływający od węzła ze znakiem minus. Dopuszczalne są jedynie źródła prądowe.

Rozwiązanie obwodu metoda węzłową

Opis obwodu równaniem macierzowym potencjałów węzłowych (zmienne poszukiwane: wektor V)

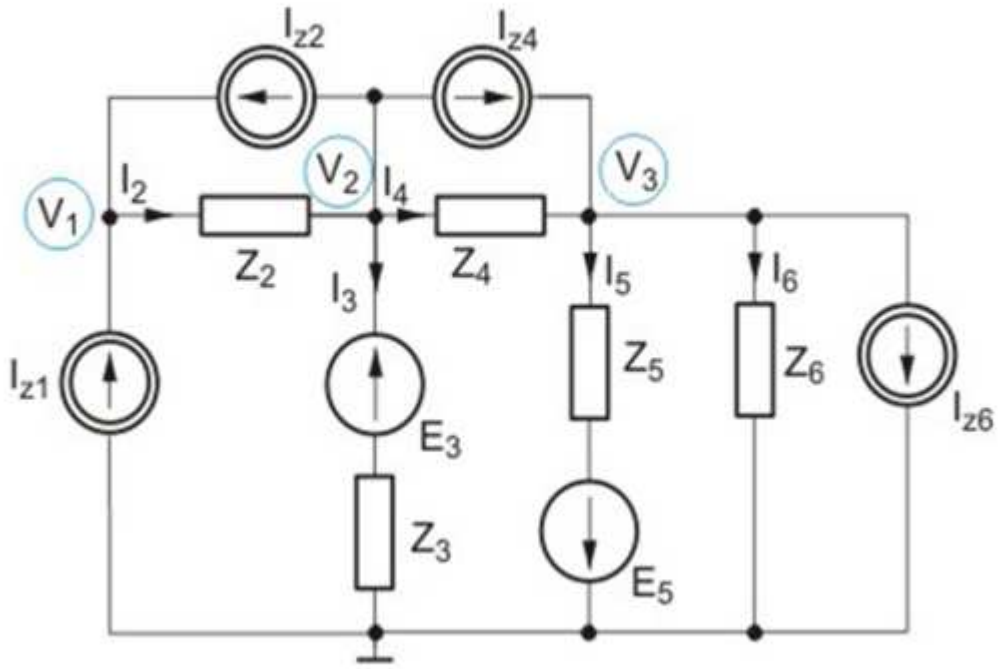
Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}_{zr}$$

Określenie prądów gałęziowych z prawa napięciowego Kirchhoffa przy znanych potencjałach węzłowych

Przykład analizy węzłowej obwodu

Przykład ilustruje kolejne etapy tworzenia i rozwiązania równań potencjałów węzłowych dla poniższego obwodu.



Schemat obwodu do przykładu

Przykład - opis węzłowy obwodu

Równanie potencjałów węzłowych

$$\mathbf{YV} = \mathbf{I}_{zr}$$

$$\begin{bmatrix} Y_2 & -Y_2 & 0 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 + Y_4 & -Y_4 \\ 0 & -Y_4 & Y_4 + Y_5 + Y_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{z1} + I_{z2} \\ E_3 Y_3 - I_{z2} - I_{z4} \\ I_{z4} - I_{z6} - E_5 Y_5 \end{bmatrix}$$

Przykład - rozwiązanie

Wektor potencjałów węzłowych

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{I}_{zr}$$

Prądy gałęziowe

$$I_2 = Y_2(V_1 - V_2)$$
$$I_3 = Y_3(V_2 - E_3)$$
$$I_4 = Y_4(V_2 - V_3)$$
$$I_5 = Y_5(V_3 + E_5)$$
$$I_6 = Y_6 V_3$$

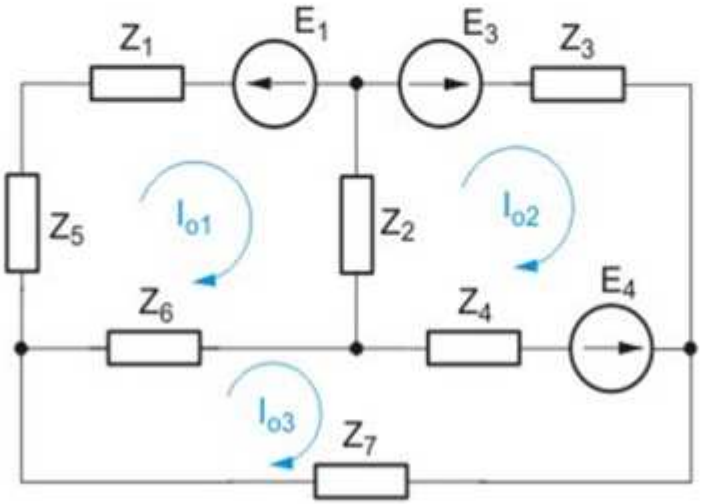
Uwagi dotyczące opisu węzłowego

Metoda potencjałów węzłowych wymaga rozwiązania układu *N* równań, gdzie *N* jest liczbą węzłów niezależnych. Zwykle liczba węzłów jest dużo mniejsza niż liczba gałęzi obwodu.

Dla obwodu zawierającego jedynie elementy RLC oraz źródła prądowe opis tworzy się automatycznie bez pisania równań Kirchhoffa. Źródła napięciowe przetwarza się na prądowe korzystając z równoważności Thevenina–Nortona.

Metoda prądów oczkowych

W metodzie prądów oczkowych, zwanej również **metodą oczkową**, wprowadza się prądy oczkowe jako zmienne, czyli prądy przypisane niezależnym oczkom występującym w obwodzie. Przykładowy wybór oczek niezależnych i oznaczenie prądów oczkowych obwodu przedstawiono na rysunku.



Przykład wyboru oczek niezależnych w obwodzie

Opis oczkowy obwodu

Opis macierzowy ogólny

$$\mathbf{Z}\mathbf{I}_o = \mathbf{E}$$

Równanie rozszerzone

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{o1} \\ E_{o2} \\ \dots \\ E_{oN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ \dots \\ I_{oN} \end{bmatrix}$$

Opis oczkowy obwodu

Opis oczkowy wynika z równań napięciowych Kirchhoffa napisanych dla oczek niezależnych obwodu i wyrażeniu prądów gałęziowych przez prądy oczkowe. Prąd gałęzi jest równy sumie lub różnicy (w zależności od zwrotu) prądów oczkowych skojarzonych z daną gałęzią.

Elementy Z_{ii} na głównej diagonalnej macierzy **Z** nazywamy **impedancjami własnymi** oczka *i*-tego. Elementy Z_{ij} poza główną diagonalną są **impedancjami wzajemnymi** między oczkiem *i*-tym oraz *j*-tym. Przy *N* oczkach niezależnych wartości *i*, *j* zmieniają się od 1 do *N*.

Automatyczne tworzenie opisu oczkowego obwodu

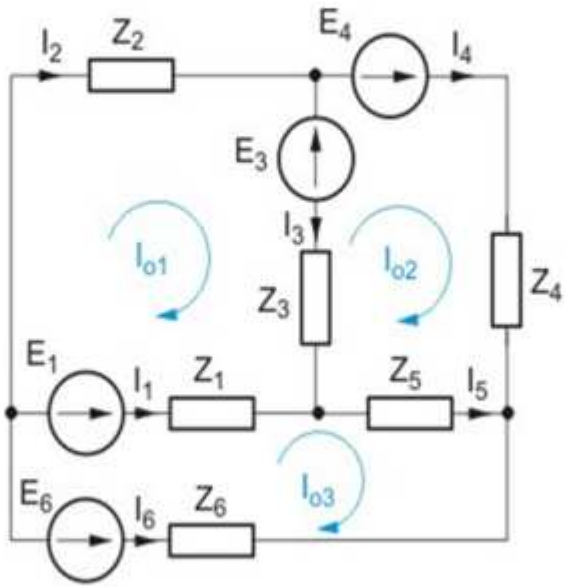
Przy założeniu, że wszystkie prądy oczkowe mają identyczny zwrot, dla obwodów RLC bez źródeł sterowanych impedancja własna oczka *i*-tego jest równa sumie impedancji wszystkich gałęzi występujących w tym oczku.

Impedancja wzajemna dwu oczek przy identycznym zwrocie wszystkich prądów oczkowych jest równa impedancji wspólnej dla obu oczek wziętej ze znakiem minus.

Element *k*-ty wektora wymuszeń napięciowych **E** jest równy sumie wszystkich napięć źródłowych występujących w *k*-tym oczku. Przy założonej orientacji oczka napięcie źródłowe dodaje się ze znakiem plus jeśli jego zwrot jest identyczny z tą orientacją a ze znakiem minus jeśli ten zwrot jest przeciwny.

Przykład metody oczkowej

Przykład ilustruje kolejne etapy tworzenia i rozwiązania równań oczkowych dla obwodu.



Schemat obwodu do przykładu

Przykład metody oczkowej

Obwód zawiera 3 oczka niezależne, stąd wymiar macierzy oczkowej jest równy 3, podobnie jak liczba nieznanych składników wektora prądów oczkowych oraz liczba znanych składników wektora napięć wymuszających. Korzystając z podanej wcześniej reguły tworzenia opisu oczkowego $\mathbf{Z}\mathbf{I}_o=\mathbf{E}$ otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} Z_1+Z_2+Z_3 & -Z_3 & -Z_1 \\ -Z_3 & Z_3+Z_4+Z_5 & -Z_5 \\ -Z_1 & -Z_5 & Z_1+Z_5+Z_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{o1} \\ I_{o2} \\ I_{o3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1-E_3 \\ E_3+E_4 \\ E_1-E_6 \end{bmatrix}$$

Przykład metody oczkowej

Prądy oczkowe

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}$$

Prądy gałęziowe

$$I_1 = I_{o3} - I_{o1}$$
$$I_2 = I_{o1}$$
$$I_3 = I_{o1} - I_{o2}$$
$$I_4 = I_{o2}$$
$$I_5 = I_{o3} - I_{o2}$$
$$I_6 = -I_{o3}$$

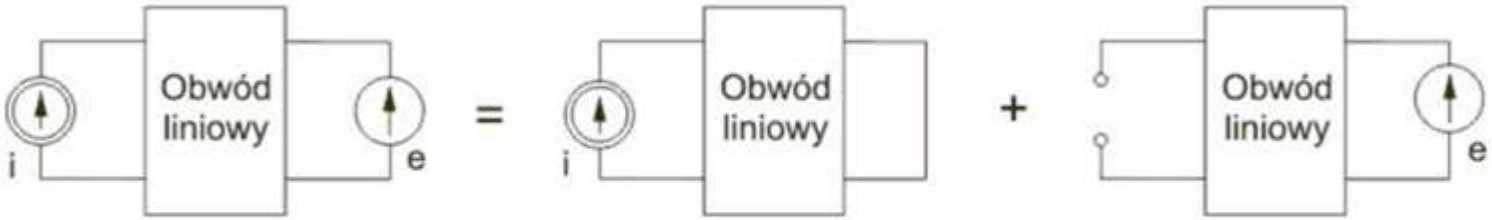
Uwagi dotyczące opisu oczkowego

Metoda potencjałów węzłowych wymaga rozwiązania układu *N* równań, gdzie *N* jest liczbą węzłów niezależnych. Zwykle liczba węzłów jest dużo mniejsza niż liczba gałęzi obwodu.

Dla obwodu zawierającego jedynie elementy RLC oraz źródła prądowe opis tworzy się automatycznie bez pisania równań Kirchhoffa. Źródła napięciowe przetwarza się na prądowe korzystając z równoważności Thevenina–Nortona.

Zasada superpozycji

Odpowiedź czasowa obwodu elektrycznego liniowego przy warunkach początkowych zerowych jest równa sumie odpowiedzi czasowych na każde wymuszenie z osobna.



Ilustracja zasady superpozycji w obwodach liniowych

Należy podkreślić, że zgodnie z zasadą superpozycji sumowanie odpowiedzi pochodzących od różnych wymuszeń może odbywać się wyłącznie w dziedzinie czasu.